TD3 : Matrice & Graphes
Module M3204

Fayssal Benkhaldoune, Rushed Kanawati
IUTV - Département R&T

6 novembre 2015

Exercice 1

Soit le graphe orienté semi-complet suivant :
$S = \{A = 1, B = 2, C = 3\}$ et $A = \{(A, C), (B, A), (C, C), \ldots\}$.
Sachant que les arrêtes suivantes n'existent pas : $(B, B), (C, A)$ et (C, B), compléter le graphe de manière à ce que le nombre de chemins de longueur 2, soit 1 de B vers C, 2 de A vers A et 2 de A vers C.

La matrice d'adjacence du graphe est M :

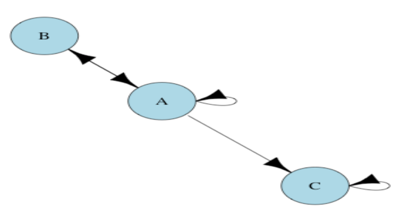
$$M = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{M}^2 = \begin{bmatrix} x^2 + y & xy & x + yz + 1 \\ x & y & 1 + z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc nous avons :

$$\begin{cases} 1 + z & = 1 \\ x^2 + y & = 2 \\ x + yz + 1 & = 2 \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow z = 0, (3) \Rightarrow x = 1, (2) \Rightarrow y = 1$ Donc la matrice d'adjacence est la suivante :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exercice 2

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

1 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

1 L'ensemble des fonctions paires : P

$f \in P : f(-x) = f(x)$
$0_E \in P$ car $0_E(-x) = 0_E(x) = 0$
$\forall f_i, f_j \in P : (f_i + f_j)(-x) = f_i(-x) + f_j(-x) = f_i(x) + f_j(x) = (f_i + f_j)(x)$ donc P est stable par rapport à la loi de composition $+$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in P : (\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$ donc P est stable par rapport à la loi de composition ., donc P est un sous-espace vectoriel de E

2 L'ensemble des fonctions impaires : I.

$f \in I : f(-x) = -f(x)$
$0_E \in I$ car $0_E(-x) = -0_E(x) = 0$
$\forall f_i, f_j \in I : (f_i + f_j)(-x) = f_i(-x) + f_j(-x) = -f_i(x) - f_j(x) = -(f_i + f_j)(x)$ donc I est stable par rapport à la loi de composition $+$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in I : (\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) = -(\lambda f)(x)$ donc I est stable par rapport à la loi de composition ., donc I est un sous-espace vectoriel de E

3 L'ensemble des fonctions polynômes de degré n.

Cette ensemble est formé des fonctions de la forme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0$. L'élément neutre 0_E n'appartient pas à cette ensemble donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E

4 L'ensemble des fonctions polynômes de degré $\leq n$

Cette ensemble est formé des fonctions de la forme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}$.
L'élément neutre 0_E appartient à cette ensemble si on a $\forall i, a_i = 0$
La somme de deux polynômes de degrés $\leq n$ est toujours un polynôme de degrés $\leq n$, l'ensemble est donc stable par rapport à la loi de composition $+$.
La multiplication d'un polynôme de degré $\leq n$ par un réel donne aussi un polynôme de degré $\leq n$, donc l'ensemble est stable par rapport)à loi de composition .
Par consequent, cette ensemble constitue un sous-espace vectoriel de E

5 L'ensemble des fonctions T-périodiques.

Nous avons $f(x + T) = f(x)$
L'élément neutre 0_E appartient à cette ensemble de fonctions car $0_E(x) = 0_E(x+T) = 0$.
$\forall f_i, f_j$ fonctions T-périodiques, $(f_i+f_j)(x+T) = f_i(x+T)+f_j(x+T) = f_i(x)/f_j(x) = (f_i + f_j)(x)$ donc l'ensemble est stable par rapport à la loi $+$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f)(x + T) = \lambda f(x + T) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$ donc l'ensemble constitue un sous-espace vectoriel de E

2 Montrer que les sous-espaces P et I sont supplémentaires i.e : $P + I = E$ et $P/I = \{0_E\}$

On cherche à démontrer que n'importe quelle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f peut s'écrire comme la somme de deux fonctions une paire et l'autre impaire.
Soit f une fonction réelle quelconque. On suppose que $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ avec f_p (resp. f_i) une fonction paire (resp. impaire). Nous avons alors $f(-x) = f_p(x) - f_i(x) \Rightarrow f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_i = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. f_p (resp. f_i) est bien une fonction paire (resp. impaire) $\square$

Exercice 3

Les espaces suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, ou sur un des ses sous-corps.

1 Les réels de la forme $x = a + b\sqrt{2}$ où a et b sont des **réels rationnels**.

Sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ nous avons $\lambda \times (a + b\sqrt{2}) \notin E$ car λa n'est pas nécessairement un rationnel (i.e. penser au cas où $\lambda = \pi$). Par contre sur le corps $\mathbb{Q}$ E est un espace vectioriel

2 Les suites divergentes.

Non, on peut trouver deux suites divergentes dont la somme n'est pas divergente. Exemple $u_n = a^n$ et $v_n = -u_n$

3 Les séries entières de rayon de convergence R

Rappel : Une série entière est donnée par :$\sum a_n z^n$
la rayon de convergence d'une série entière de terme u_n est $R = lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$
Soient les deux séries $f(z) = \sum z^n$ et $g(z) = \sum(\frac{1}{n!} - 1)z^n$. Les deux séries ont un rayon de convergence de 1 mais $(f + g)(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence de ∞ !

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, les trois fonctions données sont-elles linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$?

1 1, $sin(x), cos(x)$

$\lambda_1 + \lambda_2 sin(x) + \lambda_3 cos(x) = 0$
pour $x = 0$ nous avons $\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3$
pour $x = \frac{\pi}{2}$ nous aurons $\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_1$
pour $x = \pi$ nous aurons $\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
Donc les trois fonctions sont linéairement indépendantes.

2 2, e^x, e^{2x}

$2\lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 e^{2x} = 0$
pour $x = 0$: $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
Dérivons la fonction une fois : $\lambda_2 e^x + 2\lambda_3 e^{2x} = 0$, donc pour $x = 0$: $\lambda_2 = -2\lambda_3$
Dérivons encore une fois : $\lambda_2 e^x + 4\lambda_3 e^{2x} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -4\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.
Donc les trois fonctions sont linéairement indépendantes

3 -3, $sin^2(x), cos^2(x)$

Non car $-3 = -3(sin^2(x) + cos^2(x))$

4 $\frac{e^x}{5}, ch(x), sh(x)$

Non car $\frac{e^x}{5} = \frac{1}{5}(ch(x) + sh(x))$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par : $f(u) = (-2x+y+z, x-2y+z)$.

1 Montrer que f est une application linéaire.

$f(u_1+u_2) = (-2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2), (x_1+x_2-2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)) = f(u_1)+f(u_2)$
$f(\lambda u) = (-2\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - 2\lambda y + \lambda z) = \lambda f(u)$ $\square$

2 Donner une base de $ker(f)$, en déduire $dim(Im(f))$.

Rappel : $kerf = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 0\}$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = y = z$
une base de $Kerf$ est alors le vecteur $(1, 1, 1)$
Rappel : $dim(E) = dim(Kerf) + dim(Imf)$
La dimension de $Kerf$ est égale à 1, donc la dimension de Imf est égale à $3 - 1 = 2$

3 Donner une base de $Im(f)$.

$f(e_1) = (-2, 1), f(e_2) = (1, -2)$ est une base de Imf

Exercice 6

On considère l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$

1 Montrer que h est une application linéaire et donner sa matrice

$h(u_1 + \lambda u_2) = (x_1 + \lambda x_2 - y_1 - \lambda y_2, -3x_1 - 3\lambda x_2 + 3y - 1 + 3y_2)$
$= (x_1 - y_1, -3x_1 + 3y_1) + \lambda((x_2 - y_2, -3x_2 + 3y_2) = f(u_1) + \lambda f(u_2)$ $\square$
h est bien une application linéaire, sa matrice est donnée par les vecteurs colonnes $h(e_j)$
Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$,
La matrice de h :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

2 Montrer que h est ni injective ni surjective.

$Kerh = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\} \neq \{0\}$ donc h n'est pas injective. La dimension de $Imh = 1 < 2$ donc h ne peut être surjective. En effet, h est une endomorphisme et on peut montrer que toute endomorphisme injective est aussi surjective.

3 Donner une base de son noyau et une base de son image.

Une base du noyau est $e = (1, 1)$. Une base de Imh est $h(e_1) = (1, -3)$ (noter que diemnsion Imh est égale à 1)

4 Que se passe-t-il si l'application devient : $f(x,y) = (x-y, -3x+y)$

$ker f = \{0\}$ et f est un endomorphisme donc f est bijective.

5 f est-elle injective ? surjective ? si f est bijective exprimer son inverse et donner sa matrice

nous avons

$$\begin{cases} x-y &= x' \\ -3x+y &= y' \end{cases}$$

$x = \frac{-x'-y'}{2} \Rightarrow y = \frac{-3x'-y'}{2}$

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f^{-1}(x,y) = (\frac{-x-y}{2}, \frac{-3x-y}{2})$

$\mathcal{M}at(h,B,B) = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$

Exercice 7

On suppose que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels tel que $ad - bc \neq 0$.

1 Trouver en fonction de a, b, c et d les réels x, y, z et t tels que $A \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} ax+bz &= 1 \\ cx+dz &= 0 \\ ay+bt &= 0 \\ cy+dt &= 1 \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x = -\frac{d}{c}z \Rightarrow_{(1)} z = -\frac{c}{(ad-bc)} \Rightarrow x = \frac{d}{ad-bc}$

Nous démontrons d'une manière identique que $y = -\frac{b}{(ad-bc)}$, $t = \frac{a}{(ad-bc)}$

2 Vérifier que A admet pour matrice inverse : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Il est facile de montrer que $A^{-1} \times A = I$

Exercice 8

On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $B = (e_1, e_2)$. Soit f l'application linéaire donnée par : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(u,v) = (2u, -v)$

1 Déterminer la matrice A de f dans la base B.

$A = \mathcal{M}at(f,B,B) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2 Montrer que les vecteurs $e'_1 = (3,1), e'_2 = (5,2)$ forment une base B' de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda 1 = 0$ donc cette famille est libre, donc elle forme une base de $\mathbb{R}^2$

3 Déterminer la matrice A' de f dans la base B'en calculant $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$.

$A' = \mathcal{M}at(f, B', B') = \begin{bmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$

4 Calculer les matrices de passage P et Q entre les bases B et B'.

$P_{BB'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

5 Déterminer A' par le formule de changement de base.

$A' = QAP = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & {\scriptstyle 1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{bmatrix}$

6 Calculer les matrices de f^5 dans les deux bases.
Indication. $A = PA'P^{-1}$ *implique que* $A^n = PA'^nP^{-1}$.

$A^5 = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A'^5 = Q \times A^5 \times P = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$