De la charactérisation des modèles de H*

Flavien BREUVART

PPS, Paris Denis Diderot; LIPN, Paris Nord

2014

Adéquation complète

Adéquation complète

C'est l'identité entre la congruence dénotationnelle et la congruence contextuelle :

$$[\![M]\!] = [\![N]\!] \Leftrightarrow M \equiv_o N$$

Congruence dénotationnelle $[\![M]\!] = [\![N]\!]$

Congruence induite par le modèle dénotationnelle :

c'est l'égalité dans le modèle.

Congruence opérationnelle $M \equiv_o N$

Congruence induite par le langage :

$$\forall C, \mathcal{O}(C(\!|M|\!)) = \mathcal{O}(C(\!|N|\!))$$

Divers résultats d'adéquation complète

[Abramsky et McCusker 2007]

[Hyland 1976] [Cartwright *et.al.* 1994]

[Hyland et Ong 2000]

[Bucciarelli *et.al.* 2011]

[Wadsworth 1976]

[Harmer et McCusker 1997]

[Laird 1997]

[Plotkin 1977]

[Milner 1977]

[Laird 2003]

[Paolini 2003]

[Abramsky *et.al.* 2000]

[Abramsky *et. al.* 1998]

Caractérisation de l'adéquation complète

Théorème de Milner pour PCF [Milner 1977] :

Il y a un unique domaine continu extentionnel et pleinement adéquat pour PCF.

Cette caractérisation est dégénérée puisqu'elle démontre un résultat d'unicité.

Qu'en est-il du λ-calcul ? (en appel de tête)

Il existe de nombreux modèles non isomorphiques de Λ ! [Gouy 1995]

modèles bien stratifiés [Manzonetto 2009]

Tout modèle bien stratifié est pleinement adéquat pour Λ

Plan : 1^{ere} partie (présentation)

Les modèles choisis : Les K-modèles

- Principale sous-classe des systèmes de types avec intersection.
- Contient D_∞, P_∞, D_∞^*...
- Contient les modèles stratifiés (parmi les systèmes de types avec intersection).
- Correspond aux éléments réflexifs de $ScottL_!$ [Ehrhard ....].

Résultat (moralement) :

Un K-modèle est pleinement adéquat pour Λ ssi il est hyperimune.

Càd si les comportements mal fondé ne sont pas capturés par aucun terme récursif.

Plan : 2^{ieme} partie (preuve)

Le λ calcul avec tests $\Lambda_{\tau(D)}$

- Généralisation de [Bucciarelli&Al2011]
- Indexé par un K-model D : langage interne de D
- Ajout de $\mathcal{K}(D)$ dans la syntaxe $\Rightarrow$ PA de D pour $\Lambda_{\tau(D)}$

La pleine adéquation implique l'hyperimmunité

$\forall D$ non hyperimmune,

$$\exists \mathbf{J}_f \equiv_{\mathrm{o}} \mathbf{I}, [\![\mathbf{J}_f]\!] \neq [\![\mathbf{I}]\!]$$

- $\mathbf{J}_f$ η_∞-étend $\mathbf{I}$
- $[\![J_f]\!] \neq [\![\mathbf{I}]\!]$ obtenu via $\Lambda_{\tau(D)}$

$$\exists C \in \Lambda^{(\!|.|\!)}_{\tau(D)}, C(\!|\mathbf{J}_f|\!) \not\equiv_{\tau(D)} C(\!|\mathbf{I}|\!)$$

L'hyperimmunité implique la pleine adéquation

$\forall D$ hyperimmune, $\forall M, N$

$$[\![\mathbf{J}_f]\!] \neq [\![\mathbf{I}]\!] \Rightarrow M \not\equiv_o N$$

Induction sur la réduction d'un terme de $\Lambda_{\tau(D)}$

Plan

Les modèls choisis : Les K-modèles

- Models de Λ
- K- modèles
- $\text{S}\textsc{cott}\text{L}_!$
- Examples

Résultat

- Le résultat
- Intuition
- Exemples

Le λ calcul avec tests $\Lambda_{\tau(D)}$

- Idée
- Sémentique opérationelle
- Stratégie

La pleine adéquation implique l'hyperimmunité

L'hyperimmunité implique la pleine adéquation

Le λ-calcul pure

modèle du λ-calcul

Un modèle du λ-calcul est un objet d'une catégorie cartésienne close respectant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "abs"] & D \Rightarrow D \arrow[l, bend left, "app"] \end{tikzcd}$$

Et tel que $app \circ abs = id_M$

Extensionalité

Tout modèle pleinement adéquat de Λ est extensionel (c.à.d respecte l'eta équivalence) :

$$abs \circ app = id_M$$

Définition de la catégorie $\textsc{ScottL}_!$

Un modèle de la logique linéaire : $\textsc{ScottL}$

Objets : Posets **Morphisms :** fct. linéaires de $\mathcal{I}(D)$ vers $\mathcal{I}(P)$

Exponential : Antichaînes finies $!D = \mathcal{A}_f(D)$

$\mathcal{I}(D)$ represente le treillit complet des segments initiaux sur D
une fonction est dite linéaire si elle préserve tous les sups

La co-categorie de Kleisli : $\textsc{ScottL}_!$

Objects : Posets **Morphisms :** fct. continues de $\mathcal{I}(D)$ vers $\mathcal{I}(P)$

Identities : $1_D = id_{\mathcal{I}(D)}$

Composition : la composition de fonction

Cartesian product : $\&_{i\in I} D_i := \{(i,\alpha) | i \in I, \alpha \in A_D\}$

Exponential object : $A \Rightarrow B = \mathcal{A}_f(A)^{op} \times B$

Définition de K-modèles

K-modèle :

Un K-modèle extentionnelle est un préordre $(D, \leq)$ munie d'une bijection $\rightarrow$: $\mathcal{A}_f(D)\times D \rightarrow D$ telle que :

- $\mathcal{A}_f(D)$ est muni de l'ordre $\sqsubseteq$,défini par :
$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow \forall\alpha \in a, \exists\beta \in b, \alpha \leq \beta$$
- $(a{\rightarrow}alpha) \leq (b{\rightarrow}\beta) \;\Leftrightarrow\; a \sqsupseteq b \;\wedge\; \alpha \leq \beta$

Equivalent aux présentation avec $\mathcal{P}_f(D)$ ou $\mathcal{M}_f(D)$

Elements réflexifs

Les K-modèles sont exactement les objets réflexifes de la catégorie $\textsc{ScottL}_!$.

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{*\} \\
D_{n+1} &= D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\} \\
D_\infty &= \bigcup_n D_n
\end{aligned}
$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$\begin{aligned} D_0 &= \{*\} \\ D_{n+1} &= D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\} \\ D_\infty &= \bigcup_n D_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, \alpha) &= a \to \alpha && \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq * \\ * &= \emptyset \to * \end{aligned}$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$D_0 = \{*\}$$
$$D_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n)\times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\}$$
$$D_\infty = \bigcup_n D_n$$

$$(a, \alpha) = a \to \alpha \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = \emptyset \to *$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$D_0 = \{*\}$$
$$D_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\}$$
$$D_\infty = \bigcup_n D_n$$

$$(a, \alpha) = a \to \alpha \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = \emptyset \to *$$

Exemples (D_∞)

Scott's D_∞ :

$$D_0 = \{*\}$$
$$D_{n+1} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(D_n) \times \mathrm{D_n}) - \{(\emptyset, *)\}$$
$$D_\infty = \bigcup_n D_n$$

$$(a, \alpha) = a \to \alpha \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = \emptyset \to *$$

D_∞ est pleinement adéquat pour le λ-calcul.

[Hy76, Wad76]

Exemples (bien stratifiés)

K-modèles bien stratifiés :

Soit A un ensemble non vide et σ une permutation de A :

$$U_0^{A,\sigma} = A$$
$$U_{n+1}^{A,\sigma} = D_n \cup (\mathcal{A}_f(U_n^{A,\sigma}) \times U_n^{A,\sigma}) - \{(\emptyset,\mu) | \mu \in A\}$$
$$U_\infty^{A,\sigma} = \bigcup_n U_n^{A,\sigma}$$

$$(a,\alpha) = a \to \alpha \qquad \text{si } a \neq \emptyset \text{ or } \alpha \notin A*$$
$$\sigma(\mu) = \emptyset \to \mu \qquad \text{pour } \mu \in A$$

Les $U_\infty^{A,\sigma}$ sont pleinement adéquat pour le λ-calcul.
[Guy95,Man09]

Exemples (P_∞)

Park's P_∞ :

$$P_0 = \{*\}$$
$$P_{n+1} = P_n \cup (\mathcal{A}_f(P_n) \times P_n) - \{\{*\}, *\}$$
$$P_\infty = \bigcup_n P_n$$

$$(a, \alpha) = a \to \alpha \qquad \text{si } a \neq \{*\} \text{ or } \alpha \neq *$$
$$* = \{*\} \to *$$

P_∞ n'est pas pleinement adéquat pour le λ-calcul.
[Park76]

Exemple (D_∞^*)

Coppo,Dezani,Zacchi's D_∞^* (or Norm) :

$$
\begin{aligned}
D_0^* &= \{p, q\} \\
D_{n+1}^* &= N_n \cup (\mathcal{A}_f(N_n) \times N_n - \{(\{p\}, q), (\{q\}, p)\} \\
D_\infty^* &= \bigcup_n D_n^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a, \alpha) &= a \to \alpha \qquad\qquad \text{si } (a, \alpha) \in D_\infty^* \\
q &= \{p\} \to q \\
p &= \{q\} \to p
\end{aligned}
$$

D_∞^* n'est pas pleinement adéquat pour le λ-calcul.
[CoDeZa87]

Exemple ($\overline{\omega}$)

Ordinal's completion $\overline{\omega}$:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \mathbb{N} \\
E_{n+1} &= E_n \cup (\mathcal{A}_f(E_n) \times E_n) - \{(\{k \mid k<n\}, n) \mid n\} \\
E_\perp^\top &= \bigcup_n E_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a, \alpha) &= a \to \alpha & \text{si } (a, \alpha) \in E_\perp^\top \\
n &= \{k \mid k<n\} \to n
\end{aligned}
$$

$\overline{\omega}$ est pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Exemple ($\overline{\mathbb{Z}}$)

Relational completion $\overline{\mathbb{Z}}$:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \mathbb{Z} \\
E_{n+1} &= E_n \cup (\mathcal{A}_f(E_n) \times E_n) - \{(\{n+1\}, n) \mid n\} \\
E_\perp^\top &= \bigcup_n E_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a, \alpha) &= a \to \alpha & \text{si } (a, \alpha) \in E_\perp^\top \\
n &= \{n+1\} \to n
\end{aligned}
$$

$\overline{\mathbb{Z}}$ n'est pas pleinement adéquat pour le λ-calcul.

Exemple (H^f)

H^f :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$H_0^f = \{*\} \cup \{\alpha_j^n \mid n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\}$$

$$H_{n+1}^f = H_n^f \cup (\mathcal{A}_f(H_n^f) \times H_n^f) - \{(\emptyset, \alpha_j^n) \mid j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha_1^{n+1}\}, *)\}$$

$$H^f = \bigcup_n H_n$$

$$\begin{array}{ll} (a, \alpha) = a \to \alpha & \text{si } (a, \alpha) \in H^f \\ \alpha_j^n = \emptyset \to \alpha_{j+1}^n & 1 \leq j < f(n) \\ \alpha_{f(n)}^n = \{\alpha_1^{n+1}\} \to * & \end{array}$$

Exemple (H^f)

H^f :

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
H_0^f &= \{*\} \cup \{\alpha_j^n \mid n \geq 0,\ 1 \leq j \leq f(n)\} \\
H_{n+1}^f &= H_n^f \cup (\mathcal{A}_f(H_n^f) \times H_n^f) - \{(\emptyset, \alpha_j^n) \mid j \neq f(n)\} \cup \{(\{\alpha_1^{n+1}\}, *)\} \\
H^f &= \bigcup_n H_n
\end{aligned}$$

$$(a, \alpha) = a \to \alpha \qquad \text{si } (a, \alpha) \in H^f$$

$$\alpha_1^n = \bar{\emptyset}^{f(n)-1} \to \{\alpha_1^{n+1}\} \to *$$

l'adéquation complète pour le λ-calcul de U_∞^f dépend des propriétés de calculabilité de f.

Plan

Les modèls choisis : Les K-modèles

- Models de Λ
- K- modèles
- $\textsc{ScottL}_!$
- Examples

Résultat

- Le résultat
- Intuition
- Exemples

Le λ calcul avec tests $\Lambda_{\tau(D)}$

- Idée
- Sémentique opérationelle
- Stratégie

La pleine adéquation implique l'hyperimmunité

L'hyperimmunité implique la pleine adéquation

Le résultat

Modèle hyperimmune

Un K-modèle D est *hyperimmune* lorsque pour toute séquence $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in D^{\mathbb{N}}$, il n'existe pas de fonction récursive $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaisant pour tout n :

$$\alpha_n = a_{n,1} \to \cdots \to a_{n,g(n)} \to \alpha'_n \quad \text{and} \quad \alpha_{n+1} \in \bigcup_{k \leq g(n)} a_{n,k}.$$

Théorème Principal (Caractérisation) :

Un K-modèle extensionel qui commute avec les arbres de Böhm est pleinement adéquat ssi il est hyperimmune.

Théorème secondaire

Un K-modèle extensionel qui commute avec les arbres de Böhm est pleinement adéquat ssi il l'est inéquationellement.

Que se passe-t-il ?

$$\alpha_1 = a_{1,1} \to \cdots a_{1,i_1} \cdots \to a_{1,g(1)} \to \alpha'_1$$

$$\Cup$$

$$\alpha_2 = a_{2,1} \to \cdots a_{2,i_2} \cdots \to a_{2,g(2)} \to \alpha'_2$$

$$\Cup$$

$$\alpha_3 = a_{3,1} \to \cdots a_{3,i_3} \cdots \to a_{3,g(3)} \to \alpha'_3$$

$$\ddots$$

Is D hyperimmune ?

If g is computable, then the D is not hyperimmune (even if $(i_n)_n$ may not be computable).

Exemples (bien stratifiés)

La complétion préserve l'hyperimmunité

Un complété $\bar{E}$ est hyperimmune ssi E l'est.

K-modèles bien stratifiés :

Soit A un ensemble non vide et σ une permutation de A :

$$U_0^{A,\sigma} = A \qquad\qquad \forall \alpha \in A, \quad \alpha = \emptyset \to \sigma(\alpha)$$

$\rightsquigarrow$ **Les modèles stratifiés (et donc D_∞) sont hyperimmune :** pour tout $\alpha_1 \in A$ et tout g,

$$\alpha_1 = \emptyset \to \cdots \to \emptyset \to \sigma^n(\alpha_1)$$

Exemple (Norm)

Norm :

$$N_0 = \{p, q\} \qquad q = \{p\} \to q \qquad p = \{q\} \to p$$

Norm is not hyperimmune

$$g = (n \mapsto 1)$$

$$(\alpha_n)_n = (p, q, p, q, ...)$$

$$p = \{q\} \to p$$

$$\Cup$$

$$q = \{p\} \to q$$

$$\Cup$$

$$p = \{q\} \to p$$

$$\ddots$$

Exemple ($\overline{\omega}$)

$\overline{\omega}$:

$$E_0 = \mathbb{N} \qquad\qquad n = \{i \mid i < n\} \rightarrow n)$$

$\overline{\omega}$ hyperimmune

$$n_0 = [\![0, n_0[\![\rightarrow \cdots [\![0, n_0[\![\cdots \rightarrow n_0$$

$$\uplus\ (n_1 < n_0)$$

$$n_1 = [\![0, n_1[\![\rightarrow \cdots [\![0, n_1[\![\cdots \rightarrow n_1$$

$$\uplus\ (n_2 < n_1)$$

$$\ddots$$

$$0 = \emptyset \cdots \emptyset \cdots \emptyset \rightarrow 0$$

Imposible

Exemple ($\overline{\mathbb{Z}}$)

$\overline{\mathbb{Z}}$:

$E_0 = \mathbb{Z}$ $\qquad$ $n = \{n+1\} \to n$

Norm is not hyperimmune

$$g = (n \mapsto 1)$$

$$(\alpha_n)_n = (0, 1, 2, ...)$$

$$\begin{array}{l}
0 = \{1\} \to 0 \\
\quad \uplus \\
\quad 1 = \{2\} \to 1 \\
\qquad \uplus \\
\qquad 2 = \{3\} \to 2 \\
\qquad\quad \ddots
\end{array}$$

Exemple (H^f)

H^f :

$$H_0^f = \{*\} \cup \{\alpha_j^n \mid 1 \leq j \leq f(n)\} \quad \alpha_1^n = (\bar{\emptyset}^{f(n)-1} \to \{\alpha_1^{n+1}\} \to *)$$

H^f est hyperimmune ssi f est hyperimmune

$$\alpha_1^0 = \emptyset \to \cdots \emptyset \to \{\alpha_1^1\} \to \emptyset \cdots \to *$$

$$\Cup$$

$$\alpha_1^1 = \emptyset \to \cdots \emptyset \to \{\alpha_1^2\} \to \emptyset \cdots \to *$$

$$\Cup$$

$$\alpha_1^2 = \emptyset \to \cdots \emptyset \to \{\alpha_1^3\} \to *$$

$$\ddots$$

Plan

Les modèls choisis : Les K-modèles

- Models de Λ
- K- modèles
- $\textsc{ScottL}_!$
- Examples

Résultat

- Le résultat
- Intuition
- Exemples

Le λ calcul avec tests $\Lambda_{\tau(D)}$

- Idée
- Sémentique opérationelle
- Stratégie

La pleine adéquation implique l'hyperimmunité

L'hyperimmunité implique la pleine adéquation

Le λ-calcul avec D-tests : principe

$\Lambda_{\tau(D)}$: une extension du λ-calcul

Soit D (qui commute avec les arbres de Böhm),
$\Lambda_{\tau(D)}$ étend Λ et vérifie :

- $\Lambda_{\tau(D)}$ est confluent,
- D est pleinement adéquat pour $\Lambda_{\tau(D)}$.

Intéret

- Contexts explorant inductivement l'arbre de Böhm
- Discrimination des comportements infinis non décidable !

Syntaxe de $\Lambda_{\tau(D)}$

Grammaire

$$\begin{array}{lrcl} \text{(termes)} & M, N & ::= & \sum_i \bar{\tau}_{\alpha_i}(Q_i) \quad | \quad x \quad | \quad \lambda x.M \quad | \quad M\ N \\ \text{(tests)} & P, Q & ::= & \tau_\alpha(M) \quad | \quad \sum_i P_i \quad | \quad \prod_i P_i \end{array}$$

où les α sont des points de D.

On dénote 0 la somme vide et ϵ le produit vide

Intuitions

$Q \in \Lambda^o_{\tau(D)}$ est une réusite $\Downarrow$ ou un échec $\Uparrow$

$$\tau_\alpha(M) \Downarrow \Leftrightarrow \alpha \in [\![M]\!] \qquad [\![\bar{\tau}_\alpha(\Downarrow)]\!] = \downarrow \alpha \qquad [\![\bar{\tau}_\alpha(\Uparrow)]\!] = \emptyset$$

Exemples

$$\bar{\tau}_{\emptyset \to \alpha}(Q)\ M \to \bar{\tau}_\alpha(Q) \qquad \tau_{* \to *}(\lambda x.x) \to \tau_*(\bar{\tau}_*(\epsilon)) \to \epsilon$$

Somme, produit, et convergence

May/must non-déterminisme

$\Sigma_i Q_i \Downarrow$ iff $\exists i, Q_i \Downarrow$ $\qquad$ $\Pi_i Q_i \Downarrow$ iff $\forall_i, Q_i \Downarrow$

$M\Downarrow$ iff $(M \rightarrow_{\mathrm{h}} N \Rightarrow N\Downarrow)$ $\qquad$ $\tau_\alpha(M)\Downarrow$ iff $(\tau_\alpha(M) \rightarrow_{\mathrm{h}} Q \Rightarrow Q\Downarrow)$

Exemples

$\tau_\alpha(x) + Q\Downarrow$ $\qquad$ $\tau_\alpha(\Omega) \cdot Q \Uparrow$

$\tau_\alpha(\bar{\tau}_\alpha(\epsilon))\Downarrow$ $\qquad$ $\tau_{p=((p\rightarrow q)\rightarrow p)}(\Theta(\lambda uxy.x\ (u\ y)))\Uparrow$

Intéret

2 causes de divergence :

- $\tau_\alpha(M)$ diverge effectivement : pas de preuve de $\alpha \in [\![M]\!]$
- $\tau_\alpha(M) \rightarrow^* 0 \cdot Q$, i.e. erreur : preuve de $\alpha \notin [\![M]\!]$

Plan

Les modèls choisis : Les K-modèles

- Models de Λ
- K- modèles
- $\textsc{ScottL}_!$
- Examples

Résultat

- Le résultat
- Intuition
- Exemples

Le λ calcul avec tests $\Lambda_{\tau(D)}$

- Idée
- Sémentique opérationelle
- Stratégie

La pleine adéquation implique l'hyperimmunité

L'hyperimmunité implique la pleine adéquation

Non hyperimmunité implique non pleine adéquation

Si D n'est pas hyperimmune alors il existe g recursive et $(\alpha_n)_n$ tel que

$$\alpha_n = a_{n,1} \to \cdots \to a_{n,g(n)} \to \alpha'_n \qquad \text{and} \qquad \alpha_{n+1} \in \bigcup_{k \leq g(n)} a_{n,k}.$$

Contre exemple $\mathbf{J}_g$

On peut alors construire $\mathbf{J}_g$ tel que :

$$\tau_{\alpha_0 \to \alpha_0}(\mathbf{J}_g) \text{ diverge} \qquad\qquad \mathbf{J}_g \equiv_o \mathbf{I}$$

Cas H^f pour f récursive

$$\mathbf{G}_f\ U\ \underline{n}\ \to^*\ \lambda e x_1 \ldots x_{f(n)}.e\ x_1 \cdots x_{f(n)-1}\ (U\ \underline{n+1}\ x_{f(n)})$$

Un tel $\mathbf{G}_f$ existe bien car la suite
$(\lambda u e x_1 \ldots x_{f(n)}.e\ (u\ x_1\ \underline{n+1}) \cdots (u\ x_n\ \underline{n+1}))_n$
est une suite calculable de termes clos.

$$\mathbf{J}_f^n = \Theta\ \mathbf{G}_f\ \underline{n}$$

$$\mathbf{J}_f^n\ z \to^* \lambda x_1 x_{f(n)}.z\ x_1 \cdots x_{f(n)-1}\ (J_f^{n+1}\ x_{f(n)})$$

Réduction

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{\alpha_n \in \llbracket v \rrbracket \vdash \alpha_n \in \llbracket J_f^n\ v \rrbracket}}{\dots}}{\alpha_2 \in \llbracket v \rrbracket \vdash \alpha_2 \in \llbracket J_f^2\ v \rrbracket}}{\dots}}{\alpha_1 \in \llbracket v \rrbracket \vdash \alpha_1 \in \llbracket J_f^1\ v \rrbracket} \qquad \dfrac{}{* \in \llbracket u'' \rrbracket \vdash * \in \llbracket u'' \rrbracket}}{\{\alpha_1\} \rightarrow * \in \llbracket u' \rrbracket, \alpha_1 \in \llbracket v \rrbracket \vdash * \in \llbracket u'\ (J_f^1\ v) \rrbracket}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha_0 \in \llbracket u \rrbracket, \alpha_1 \in \llbracket v \rrbracket \vdash * \in \llbracket u\ x_1 \cdots x_{f(n)-1}\ (J_f^1\ v) \rrbracket}{\alpha_0 \in \llbracket u \rrbracket \vdash \{\alpha_1\} \rightarrow * \in \llbracket \lambda x_{f(0)}.u\ x_1 \cdots x_{f(n)-1}\ (J_f^1\ x_{f(0)}) \rrbracket}}{\alpha_0 \in \llbracket u \rrbracket \vdash \alpha_0 \in \llbracket \lambda x_1 \dots x_{f(0)}.u\ x_1 \cdots x_{f(n)-1}\ (J_f^1\ x_{f(0)}) \rrbracket}}{\alpha_0 \in \llbracket u \rrbracket \vdash \alpha_0 \in \llbracket \mathbf{J}_g^0\ u \rrbracket}}{\vdash \alpha_0 \rightarrow \alpha_0 \in \llbracket \mathbf{J}_g^0 \rrbracket}
$$

Réduction de $\tau_{\alpha_0\to\alpha_0}(\mathbf{J}_g^0)$

$$
\begin{array}{ll}
 & \tau_{\alpha_0\to\alpha_0}(\mathbf{J}_g^0) \\
\to & \tau_{\alpha_0}(\mathbf{J}_g^0\ \bar{\epsilon}_{\alpha_0}) \\
\to^* & \tau_{\alpha_0}(\lambda x_1 ... x_{f(0)}.\bar{\epsilon}_{\alpha_0}\ x_1 \cdots x_{f(n)-1}\ (J_f^1\ x_{f(0)})) \\
\to^* & \tau_*(\bar{\epsilon}_{\alpha_0}\ 0 \cdots 0\ (J_f^1\ \bar{\epsilon}_{\alpha_1})) \\
\to^* & \tau_*(\bar{\tau}_*(\tau_{\alpha_1}(J_f^1\ \bar{\epsilon}_{\alpha_1}))) \\
\to & \tau_{\alpha_1}(J_f^1\ \bar{\epsilon}_{\alpha_1}) \\
\to^* & \tau_{\alpha_2}(J_f^2\ \bar{\epsilon}_{\alpha_2}) \\
\cdots & \cdots \\
\to^* & \tau_{\alpha_n}(J_f^n\ \bar{\epsilon}_{\alpha_n}) \\
\cdots & \cdots
\end{array}
$$

Plan

Les modèls choisis : Les K-modèles

- Models de Λ
- K- modèles
- ScottL$_!$
- Examples

Résultat

- Le résultat
- Intuition
- Exemples

Le λ calcul avec tests $\Lambda_{\tau(D)}$

- Idée
- Sémentique opérationelle
- Stratégie

La pleine adéquation implique l'hyperimmunité

L'hyperimmunité implique la pleine adéquation

Correction

Pleine adequation de $\Lambda_{\tau(D)}$

L'interpretation d'un terme clos M peut être décrite via convergence dans un contexte avec tests :

$$\alpha \in [\![M]\!] \quad \Leftrightarrow \quad \tau_\alpha(M) \Downarrow$$

Généralisable aux termes non clos

La correction : un théorème maintenant syntaxique

Si D est hyperimmune :

$$\alpha \in [\![M]\!] - [\![N]\!] \; \Rightarrow \; M \not\sqsubseteq_{\mathrm{o}} N$$

Par induction sur la longueur de réduction de $\tau_\alpha(M)$.

Hypothèse d'hyperimmunicité

Lemme clé

Si $(\{\alpha\} \to \alpha) \notin [\![M]\!]$ alors :

- soit $\mathbf{I} \not\sqsubseteq_o M$
- soit il existe $((\alpha_i)_i, f)$ qui contredit l'hyperimmunité.

Création de $((\alpha_i)_i, f)$ par co-induction le long de $\tau_{\{\alpha\}\to\alpha}(M)$.

Conclusion et intérogations

Théorème final

Pour tout K-modèle D extentionel qui commute avec les arbres de Böhm, ces propositions sont équivalentes :

- D est hyperimmune,
- D est inequationellement pleinement adéquat pour Λ,
- D pleinement adéquat pour Λ.

Interpretation ?

- La classe de modèles est mal choisie ?
  Probablement pas [Ehrhard 2012]
- Le lambda calcul pur est un "mauvais" langage ?
- Une conséquence de l'expressivité de la classe de modèles ?
  $\rightsquigarrow$ Il y aurait 2^ω théories entre H et H^*...